



Új Nemzeti Kiválóság Program
2017/2018



Emberi Erőforrások
Minisztériuma

Tengelyszimmetrikus centrális kon gurációk vizsgálata a négytest-problémában

Név: Kővári Emese

Kar: ELTE TTK

Budapest, 2018. június 30.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
Téma bemutatása	4
Elméleti háttér.....	4
A három egyenlő tömeg esetének analitikus feltételei.....	7
Megoldásgörbék numerikus feltérképezése a $\beta - a$ síkon.....	8
Konvex eset.....	8
Konvex eset.....	9
A dimenziótlan tömegek alakulása β függvényében.....	12
Konvex eset.....	12
Konkáv esetek.....	13
Kitekintés.....	14
Hivatkozások	16
Mellékletek	17
1. Összegzés.....	17
2. Konferenciaszereplések és publikációk.....	18
3. Egyéb, dologi keretben megvalósuló eredmény.....	18

Bevezetés

Az n -test probléma mint az égi mechanika alapfeladata n darab pontszerű test mozgását vizsgálja, feltételezve, hogy a tömegpontok között csak a kölcsönös Newton-féle gravitációs vonzóerő hat. Igen régi és meglehetősen komplex problémakörrel van szó. Teljes megoldás csak az $n = 2$ esetre, vagyis a kéttest-problémára létezik, melyet Newton munkássága óta ismerünk és alkalmazunk például a bolygómozgások tanulmányozása során. Azonban már az $n = 3$ eset sem integrálható. Érdekes tehát bizonyos speciális szimmetriával bíró eseteket tanulmányozni, mint például a centrális kon gurációkat.

Centrálisnak nevezünk egy kon gurációt, ha az eredő erők a rendszer tömegközéppontja felé mutatnak. $n = 2$ -re bármely kon guráció centrális. 3 test esetén pontosan öt megoldás létezik, ezek közül három a jólismert Euler-féle kollineáris megoldás, kettő pedig a Lagrange-féle szabályos háromszög-megoldás. $n > 3$ számú testre azonban a megoldások száma, $n > 5$ -re pedig annak végeessége is kérdéses.

Éppen ezért tekinthető korszakalkotó eredménynek Érdi és Czirják (2016) munkája, melyben a szerzők a centrális négytest-probléma egy jelentős alosztályára találtak egzakt, analitikus megoldást. Eredményük számtalan új ablakot nyitott az elméleti égi mechanikában éppúgy, mint az alkalmazott űrkutatásban. A pályázat keretein belül megvalósuló kutatás során elméletüket gondoltam tovább, és annak egy speciális, három egyenlő tömeget tartalmazó esetével foglalkoztam. A feltételeinek analitikus felírását követően az egyenleteket numerikusan oldottam meg. Teljes leírást kínálva, a négy test pozícióit (vagyis a kon guráció alakját) és azok dimeziótlan tömegeit is megadtam.

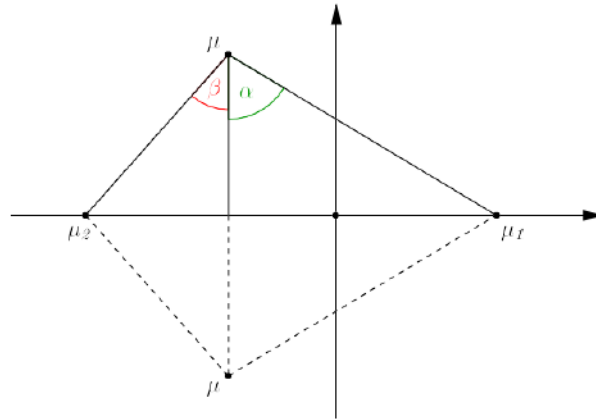
Kitekintésképpen az elmélet alkalmazhatóságát vizsgáltam a négyescsillag-rendszerek körében, azonban a jövőbeli alkalmazások között érdemes akár mesterséges égitestekre is gondolnunk.

Téma bemutatása

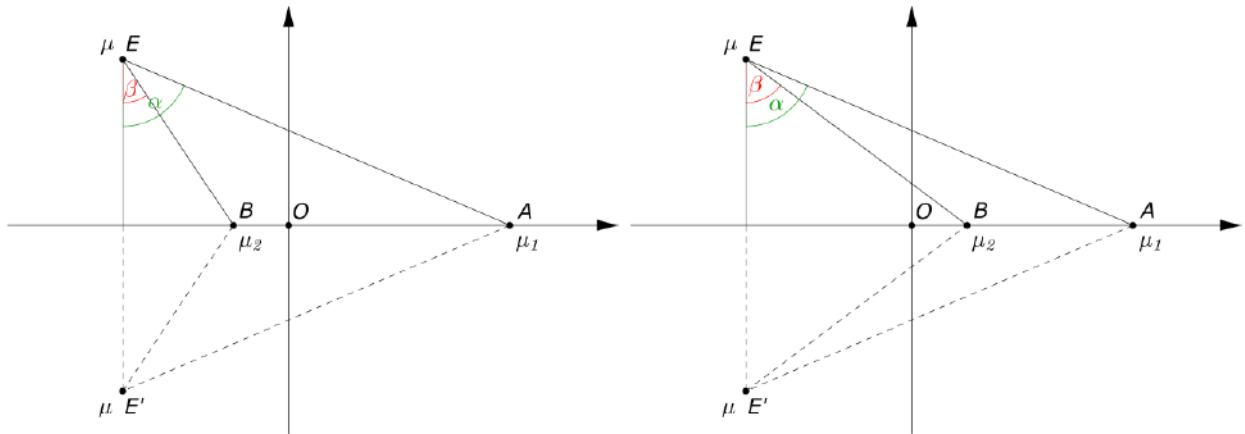
Elméleti háttér

Kiindulásképpen írjuk fel a négytest-probléma Newton-féle mozgásegyenleteit:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = k^2 \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \quad 1 \leq i, j \leq 4, \quad (1)$$



1. ábra. A konvex centrális konfigurációk. (O a rendszer tömegközéppontja.)



2. ábra. A konkáv centrális konfigurációk. Bal oldal: az első konkáv esetben a rendszer O tömegközéppontja a deltoidon belül helyezkedik el. Jobb oldal: O a deltoidon kívülre esik (második konkáv eset).

ahol $k = 0.0172029895$ konstans, m_i az i -edik tömegpont tömege, \mathbf{r}_i az i -edik tömegponthoz mutató baricentrikus helyvektor, $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ pedig az i -edik és j -edik testek közötti távolság. A centralitás feltételét bevezetve (miszerint bármely tömegpont pozícióvektora a gyorsulásvektorának skalárszorosaként adható meg), (1) a következő alakot ölti:

$$k^2 \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -\lambda \mathbf{r}_i, \quad 1 \leq i, j \leq 4, \quad (2)$$

ahol $\lambda > 0$ minden időpillanatban egyenlő az összes testre.

(2) általános megoldása nem ismeretes, tengelyszimmetrikus esetének azonban teljes, analitikus megoldását ismertük meg a közelmúltban Érdi és Cziráj (2016) munkáján keresztül. A tengelyszimmetrikus esetben két test a rendszer szimmetriatengelyén fekszik (jelölje ezeket A és B , μ_1 és μ_2 dimenziótlan tömeggel), a másik két test (E és E')

pedig arra szimmetrikusan helyezkedik el egyenlő μ tömegekkel. Három különböző esetről beszélhetünk ekkor: a konvex esetben a négy test egy konvex deltoid csúcspontjaiban foglal helyet (1. ábra), a másik két esetben pedig konkáv deltoidok jelentik a tömegpontok által meghatározott konfigurációt. Az első konkáv esetben a rendszer O tömegközéppontja a deltoidon belül helyezkedik el, a második konkávban pedig azon kívül esik (2. ábra). A konfigurációkat jellemző ismeretlenek az α, β szögkoordináták (lásd szintén: 1. és 2. ábrák). Érdi és Cziráj (2016) az ún. inverz probléma megoldását adta meg, melyben a hagyományosan paraméterként kezelt dimenziótlan tömegek és az eredetileg ismeretlen szögkoordináták szerepet cserélnek. Így a megoldást a tömegekre kapjuk meg:

$$\mu_1 = \frac{(b_1 + a_0 - b_0)b_0}{a_0b_1 + a_1b_0 - a_1b_1}, \quad \mu_2 = \frac{(a_1 + b_0 - a_0)a_0}{a_0b_1 + a_1b_0 - a_1b_1}, \quad (3)$$

ahol az a_0, a_1, b_0, b_1 együtthatók az α, β koordinátákat tartalmazzák a következő módon:

$$a_0 = \cos^3 \alpha - \frac{1}{8} \tan \alpha, \quad (4)$$

$$a_1 = \frac{1}{(\tan \alpha + \tan \beta)^2} + \frac{1}{8} - \cos^3 \alpha - \cos^3 \beta \tan \beta - \frac{1}{8} \tan \alpha, \quad (5)$$

$$b_0 = \cos^3 \beta - \frac{1}{8} \tan \beta, \quad (6)$$

$$b_1 = \frac{1}{(\tan \alpha + \tan \beta)^2} + \frac{1}{8} - \cos^3 \alpha - \cos^3 \beta \tan \alpha - \frac{1}{8} \tan \beta, \quad (7)$$

$$c = \cos^3 \beta - \frac{1}{8} \tan \alpha - \cos^3 \alpha - \frac{1}{8} \tan \beta, \quad (8)$$

konkáv esetek:

$$a_0 = \cos^3 \alpha - \frac{1}{8} \tan \alpha, \quad (9)$$

$$a_1 = \frac{1}{(\tan \alpha - \tan \beta)^2} - \frac{1}{8} - \cos^3 \alpha - \cos^3 \beta \tan \beta - \frac{1}{8} \tan \alpha, \quad (10)$$

$$b_0 = -\cos^3 \beta - \frac{1}{8} \tan \beta, \quad (11)$$

$$b_1 = \frac{1}{(\tan \alpha - \tan \beta)^2} + \frac{1}{8} - \cos^3 \alpha - \cos^3 \beta \tan \alpha + \frac{1}{8} \tan \beta, \quad (12)$$

$$c = \cos^3 \beta - \frac{1}{8} \tan \alpha + \cos^3 \alpha - \frac{1}{8} \tan \beta, \quad (13)$$

illetve a két konkáv eset megkülönböztetésére szolgáló feltétel:

$$\tan \beta < \frac{\mu_1}{1 - \mu_2} \tan \alpha \quad (14)$$

az első konkáv esetben,

$$\tan \beta > \frac{\mu_1}{1 - \mu_2} \tan \alpha \quad (15)$$

a másodikban.

A három egyenlő tömeg esetének analitikus feltételei

Figyelembe véve, hogy a rendszerben két egyenlő tömeg (μ) adott, a három egyenlő tömeg így kétféleképpen állhat elő: vagy $\mu = \mu_1$, vagy $\mu = \mu_2$.

Kezdjük a tárgyalást a $\mu = \mu_1$ esettel! Felhasználva, hogy μ kifejezhető μ_1 és μ_2 segítségével ($\mu = (1 - \mu_1 - \mu_2)/2$), rögtön adódik, hogy $3\mu_1 + \mu_2 = 1$, melybe behelyettesítve a (3)-ban kapott megoldásokat az tömegekre, (némi átalakítás és egyszerűsítés után) a

$$a_0 - a_1 - 3b_0 = 0 \quad (16)$$

feltételhez jutunk. Az együtthatók helyettesítését követően (16)-ból adódik, hogy

$$\tan \beta \cos^3 \alpha - 2 \cos^3 \beta + \frac{2}{8} + \tan \alpha \cos^3 \alpha - \frac{1}{(\tan \alpha + \tan \beta)^2} = 0 \quad (17)$$

a konvex esetben, és

$$-\tan \beta \cos^3 \alpha - 2 \cos^3 \beta + \frac{2}{8} + \tan \alpha \cos^3 \alpha - \frac{1}{(\tan \alpha - \tan \beta)^2} = 0 \quad (18)$$

a konkávokban.

Hasonlóan járhatunk el a $\mu = \mu_2$ esetben is. Itt a kiinduló feltétel szerint $3\mu_2 + \mu_1 = 1$, mely az együtthatók behelyettesítése (és egyszerűsítések) után a

$$b_0 - b_1 - 3a_0 = 0 \quad (19)$$

egyenletet eredményezi. (19) a megfelelő együtthatók helyettesítésével

$$\tan \alpha \cos^3 \beta - 2 \cos^3 \alpha + \frac{2}{8} + \tan \beta \cos^3 \beta - \frac{1}{(\tan \alpha + \tan \beta)^2} = 0 \quad (20)$$

lesz a konvex esetben, és

$$-\tan \alpha \cos^3 \beta - 2 \cos^3 \alpha + \frac{2}{8} + \tan \beta \cos^3 \beta + \frac{1}{(\tan \alpha - \tan \beta)^2} = 0 \quad (21)$$

a konkávokban.

A feladat tehát (17) és (18), valamint (20) és (21) megoldása - például β -ra (α -t rögzítve). Analitikus megoldás hiányában ezt numerikusan tettem meg. A számításokat MATLAB-ban végeztem: α -t minden iterációs lépésben rögzítve az $f(\alpha; \beta) = 0$ egyenlet zérushelyeit kerestem, ahol a $\beta \mapsto f(\alpha; \beta)$ függvény rendre a (17), (18), (20) és (21) egyenlet bal oldala volt.

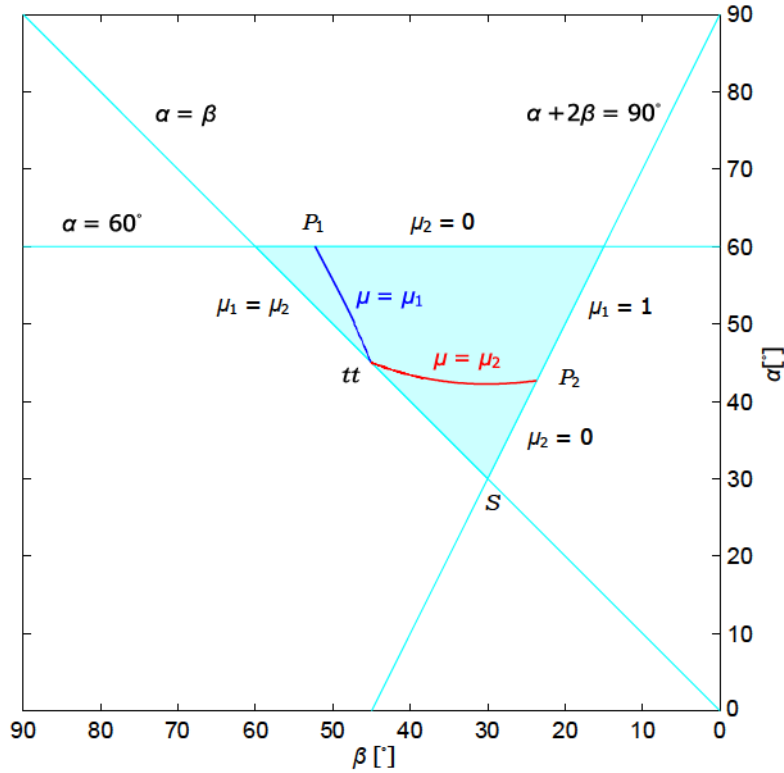
Megoldásgörbék numerikus feltérképezése a $\beta - \alpha$ síkon

Konvex eset

A konvex eset megoldásgörbéit a 3. ábrán látjuk (a színezett terület és a kritikus határolóegyenesek Érdi és Czirják (2016) munkájából már ismertek). A G -vel jelölt szögpár $\alpha = \beta = 45^\circ$ -nál a négyzet-kon gurációt reprezentálja négy egyenlő tömeggel (Albouy, 1996). Innen indulnak a három egyenlő tömeg megoldásgörbéi: balra, kékkel jelölve a $\mu = \mu_1$ eseté, jobbra pedig pirossal színezve a $\mu = \mu_2$ -é.

A $\mu = \mu_1$ esetben (3. ábra, kék görbe) a G ponttól távolodva α 45° -ról 60° -ra, β pedig 45° -ról 52.282° -re nő, miközben a kiindulópont-beli négyzet-kon gurációból az A test irányában egyre jobban elnyújtott deltoid lesz. A görbe P_1 jelű végpontja az $\alpha = 60^\circ$ kritikus egyenesre esik $\beta = 52.282^\circ$ -nél, mely mentén $\mu_2 = 0$. Ez azt jelenti, hogy a négytest-probléma háromtest-problémára redukálódik: az A , E és E^j testek a közös $1/3$ tömeggel a Lagrange-féle szabályos háromszög csúcspontjaiban foglalnak helyet ($\alpha = 60^\circ$ miatt).

A 3. ábra $\mu = \mu_2$ esetet jelentő pirossal színezett görbéje kezdetben (mindkét szögre nézve) csökken, és a minimumát $\alpha = 42.211^\circ, \beta = 30.153^\circ$ -nál éri el. Innen továbbhaladva, α és β is növekszik, maximális értékük $\alpha = 42.640^\circ, \beta = 23.680^\circ$, melyet a P_2 -vel jelölt végpontban, az $\alpha + 2\beta = 90^\circ$ egyenes mentén érnek el. A piros görbe ezen sajátossága azt eredményezi, hogy a $42.211^\circ < \alpha < 42.640^\circ$ intervallumban minden α -hoz két olyan β tartozik, amire $\mu = \mu_2$. A végpontban a kritikus tömegértékek $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$, és ennek megfelelően B mellett E és E^j is nulla tömegűvé válik, vagyis a probléma egycentrum-probléma az egységtömegű A testtel.

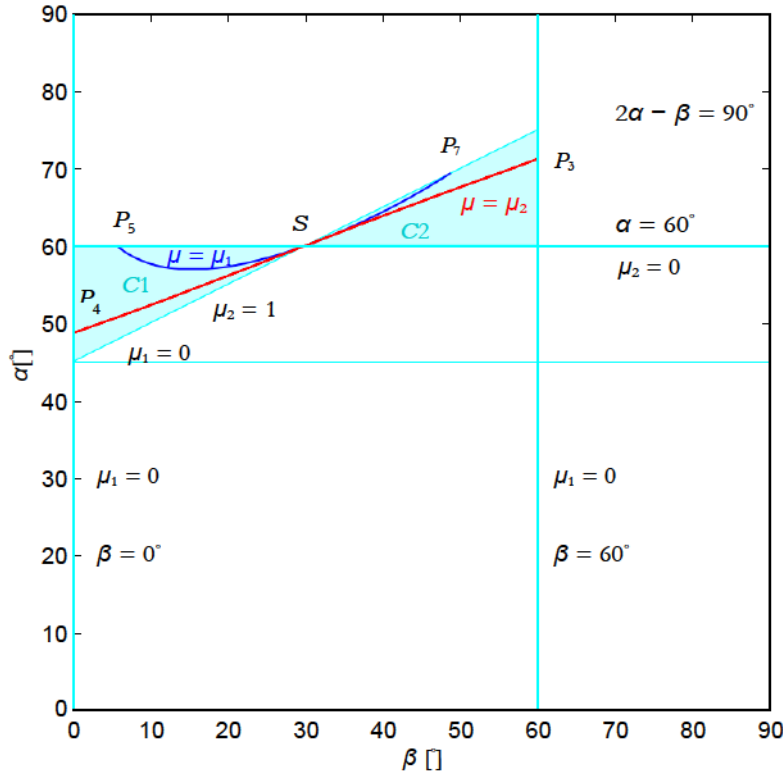


3. ábra. A három egyenlő tömeg megoldásgörbéi a konvex esetben. A kritikus egyenesekkel határolt színezett területen találjuk azon α, β párokat, melyek konvex centrális kon gurációt eredményeznek (lásd: Érdi és Czirják (2016)). Az S -sel jelölt szinguláris pontban ($\alpha = \beta = 30^\circ$) $\mu_1 + \mu_2 = 1$. A G pontban ($\alpha = \beta = 45^\circ$) a négy tömeg egyenlő, a kon guráció négyzet. A kék görbe mentén az A, E, E' , a piros mentén pedig a B, E, E' testek tömege egyenlő. A megoldásgörbék végpontjait P_1 és P_2 jelöli, melyek kritikus egyenesekre esnek.

Konkáv esetek

Nézzük most a konkáv eseteket a 4. ábrán! A kritikus egyenesek két háromszöget fognak közre (lásd: Érdi és Czirják (2016)), melyeken belül a konkáv centrális kon gurációk megvalósulnak ($C1$ jelöli az első, $C2$ pedig a második konkáv esetet).

Tekintsük az $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$ -nál található S jelű szinguláris pontot! A tömegekre fennálló feltétel szerint $3\mu_1 + \mu_2 = 1$ S -ben, ami $\mu = (1 - \mu_1 - \mu_1)/2 = (1 - \mu_1 - 1 + 3\mu_1)/2 = \mu_1$ miatt μ_1 és μ egyenlőségét eredményezi, bármely $0 \leq \mu_2 \leq 1$ mellett. A kék $\mu = \mu_1$ görbe tehát szükségszerűen áthalad a szinguláris ponton. Azt látjuk azonban, hogy a piros színű $\mu = \mu_2$ görbe is keresztezi S -et. Ez abban az esetben lehetséges, amikor mind

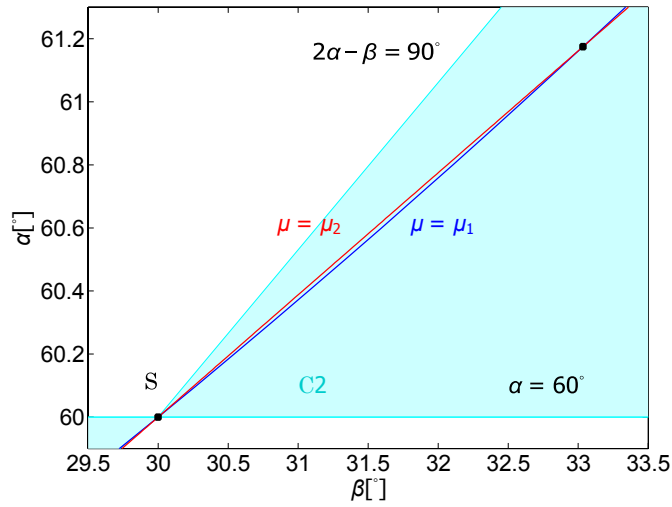


4. ábra. A három egyenlő tömeg megoldásgörbéi a konkáv esetekben. A kritikus egyenesekkel határolt színezett háromszögekben találjuk azon α, β párokat, melyek konkáv centrális konfigurációkat eredményeznek (lásd: Érdi és Czirják (2016)). Az első konkáv esethez tartozó háromszöget C1, a másodikhoz tartozót C2 jelöli. Az S szinguláris pontban ($\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$) $3\mu_1 + \mu_2 = 1$. A kék görbe mentén az A, E, E' testek tömege egyenlő, a piros mentén pedig a B, E, E' testek tömege egyenlő. Ezek két pontban metszik egymást: a szinguláris pontban, valamint $\alpha = 61.1766^\circ, \beta = 33.0391^\circ$ -nél. A megoldásgörbék végpontjait P₃, P₄, P₅ és P₇ jelöli, melyek kritikus egyenesekre esnek.

a négy tömeg egyenlő. A konfiguráció $\alpha = 60^\circ$ miatt mind a két esetben a Lagrange-féle szabályos háromszög az A, E, E' testekkel, melynek centroidjában $\beta = 30^\circ$ miatt a B test helyezkedik el. Megjegyzem, hogy a szinguláris ponton kívül található még egy metszéspont, ahol a négy tömeg egyenlő: $\alpha = 61.1766^\circ, \beta = 33.0391^\circ$ -nél. Az 5. ábra a két metszéspont környezetét mutatja kinagyítva.

Vizsgáljuk most külön-külön a két megoldásgörbét! Látható, hogy a $\mu = \mu_1$ és $\mu = \mu_2$ esetnek is van megoldása mindkét konkáv esetben.

Kezdjük az elemzést a $\mu = \mu_1$ megoldással (4. ábra, kék görbe)! A P₃-tel jelölt kezdőpont az első konkáv háromszögben (C1) található, nevezetesen az $\alpha = 60^\circ$ kritikus egyenesen, $\beta = 5.678^\circ$ -nél. Az egyenes mentén μ_2 végig nulla, így $\mu = \mu_1 = 1/3$ szükséges, a konfiguráció pedig az A, E, E' testekkel háromtest-problémára redukálódik: az



5. ábra. A kék $\mu = \mu_1$ és piros $\mu = \mu_2$ görbék metszéspontjainak kinagyított környezete. Mindkét - fekete pontokkal hangsúlyozott - metszéspont a **C2** jelű háromszögben valósul meg, vagyis a második konkáv esetben. Pontos helyzetük: (i) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$; (ii) $\alpha = 61.1766^\circ$, $\beta = 33.0391^\circ$.

elrendezés a Lagrange-féle szabályos háromszög-megoldás. A kezdőpontot elhagyva a kék görbe először a minimális $\alpha = 56.930^\circ$, $\beta = 15.415^\circ$ -ig csökken (mindkét szögváltozóban), majd a szinguláris pont eléréséig növekszik. A megoldás ilyenfajta viselkedése azt eredményezi, hogy az $56.930^\circ < \alpha < 60^\circ$ intervallumban minden α -hoz található két olyan β (az $5.678^\circ < \beta < 30^\circ$ intervallumból), melyekre $\mu = \mu_1$. A kék görbe a második konkáv háromszögben (**C2**) a $2\alpha - \beta = 90^\circ$ kritikus egyenes mentén éri el P_7 jelű végpontját, nevezetesen $\alpha = 69.382^\circ$, $\beta = 48.764^\circ$ -nél. Itt $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, következésképpen az A , E , E^j testek nulla tömegűek, a kon guráció pedig egycentrum-probléma az egységtömegű B -vel.

Térjünk most át a $\mu = \mu_2$ megoldásra (4. ábra, piros görbe)! Ennek P_4 -gyel jelölt kezdőpontja a **C1**-ben található $\beta = 0^\circ$ kritikus egyenesen van $\alpha = 48.729^\circ$ -nél. Az egyenes mentén $\mu_1 = 0$, így a B , E és E^j testek a közös $\mu = \mu_2 = 1/3$ tömeggel az Euler-féle kolli-neáris megoldást valósítják meg. A **C2**-ben található P_3 jelű végpont a kritikus $\beta = 60^\circ$ -ra esik $\alpha = 71.199^\circ$ -nél. Ezen egyenes mentén ismét μ_1 nulla, tehát a négy testből megintcsak a B , E és E^j marad $1/3$ tömeggel, a kon guráció azonban ezúttal a Lagrange-féle szabályos háromszög.

A dimenziótlan tömegek alakulása β függvényében

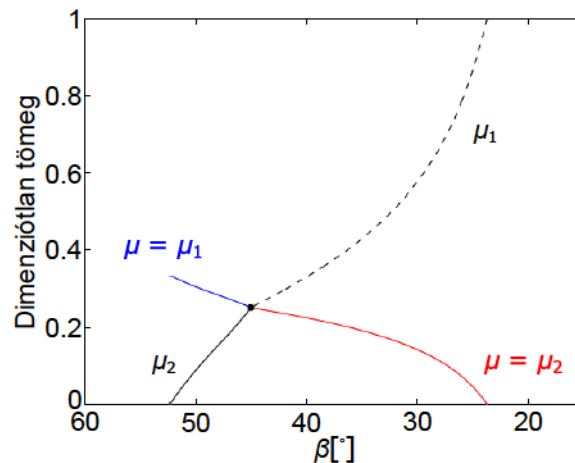
Az α, β szögpárok ismeretében (3)-ból számolhatóak a dimenziótlan tömegek. A következőkben azt gyelhetjük meg, hogyan változik a három egyenlő, illetve a negyedik tömeg β függvényében.

Konvex eset

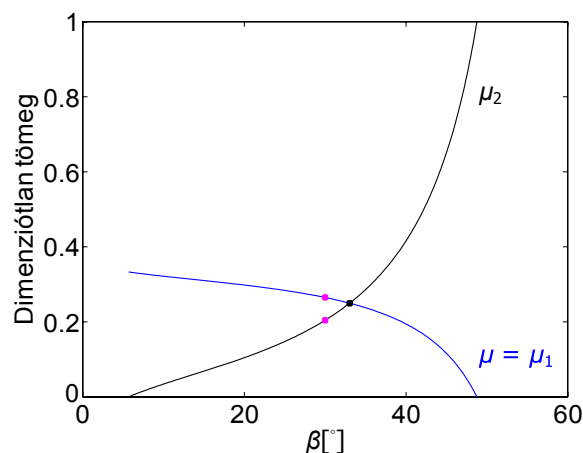
Láttuk, hogy a kék $\mu = \mu_1$ és piros $\mu = \mu_2$ görbe egyaránt a G -vel jelölt pontból indul $\alpha = \beta = 45^\circ$ -nál. Ennek megfelelően a közös tömeg valóban $1/4$ G -ben, mint azt a 6. ábráról leolvashatjuk.

Figyelmünket ezután a $\mu = \mu_1$ esetre irányítva meg gyelhetjük, ahogyan G -t a növekvő β (és α) szögek irányában elhagyva az A, E és E^j testek tömege (6. ábra, kék görbe) $1/3$ -hoz közelít és $\beta = 52.282^\circ$ ($\alpha = 60^\circ$)-nál éri el. Ezzel együtt B tömege (6. ábra, fekete folytonos vonal) nullára csökken.

A $\mu = \mu_2$ esetben G -től csökkenő β -k irányában távolodunk ($45^\circ \geq \beta \geq 23.680^\circ$). B, E és E^j közös tömege (6. ábra, piros görbe) ezalatt $1/4$ -ről 0 -ra csökken, az A testé (6. ábra, fekete szaggatott vonal) pedig növekszik, és a végpontban ($\beta = 23.680^\circ, \alpha = 42.640^\circ$) éri el az egységet.



6. ábra. A dimenziótlan tömegek változása β függvényében (konvex eset). A $\mu = \mu_1$ (kék) és $\mu = \mu_2$ (piros) megoldások egyaránt láthatóak. A fekete folytonos, illetve szaggatott görbék rendre a μ_2 és μ_1 kiegészítő tömegeket mutatják. A fekete ponttal kiemelt (G) pontban $\beta = 45^\circ$ -nál mind a négy tömeg egyenlő: $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1/4$.

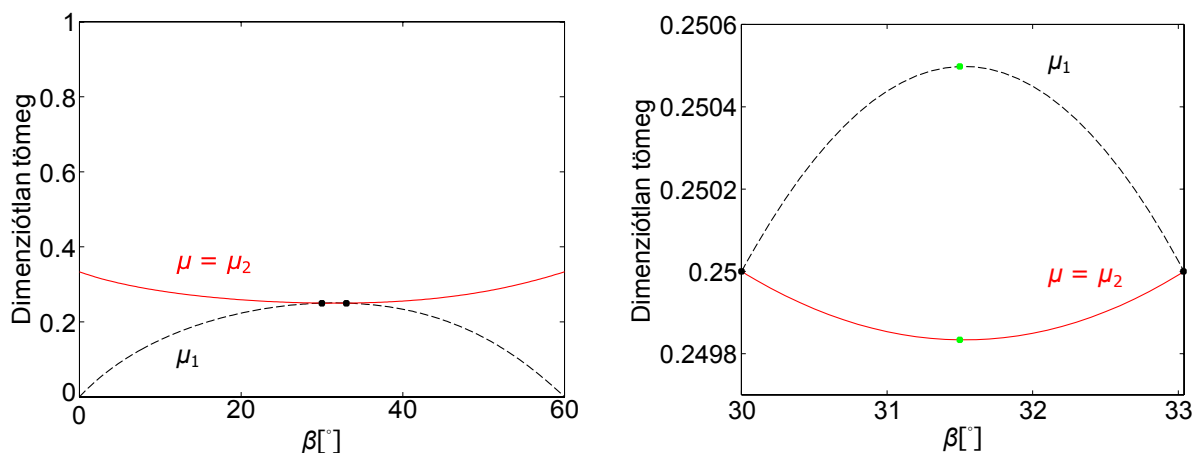


7. ábra. A dimenziótlan tömegek változása β függvényében (konkáv esetek, $\mu = \mu_1$). A fekete folytonos görbe a μ_2 maradéktömeget mutatja a három egyenlő mellett. A rózsaszín pontok $\beta = 30$ -nál a Palmore-konstansra vonatkozó tömegértékeket emelik ki, a fekete pontok pedig a négy egyenlő $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1/4$ tömeget jelölik $\beta = 33.0391$ -nél.

Konkáv esetek

A 7. ábra a $\mu = \mu_1$ esetet mutatja (az első és második konkáv eset összevonásával). A minimális $\beta = 5.678$ érték $\alpha = 60$ -hoz tartozik (lásd: 4. ábra). Következésképpen a kritikus tömegek: $\mu = \mu_1 = 1/3$, $\mu_2 = 0$, a konfiguráció pedig a Lagrange-féle szabályos háromszög az A , E , E' testekkel. A kezdőpontot elhagyva, β növekedésével μ_2 is növekszik, az egységtömeget a végpontban éri el $\beta = 48.764$ -nél. Mindeközben a három egyenlő tömeg ($\mu = \mu_1$) egyre csökkenve a végpontbeli nullához tart. Mielőtt a $\mu = \mu_2$ esetre térnénk, érdemes kiemelni a megoldásgörbe két speciális pontját. (i) A szinguláris pontban ($\beta = 30$) $\mu = \mu_1 = 0.26522$, $\mu_2 = 0.20435$ (az értékeket rózsaszín pontok jelzik a 7. ábrán). Ezek hányadosa $\mu_2/\mu_1 = 0.77049$, ami éppen a $P = (2 + 3\sqrt{3})/(18 - 5\sqrt{3})$ Palmore-konstans (lásd: Palmore (1975)). (ii) A másik gyémánt méltó pont a 7. ábrán a $\mu = \mu_1$ és μ_2 görbék négy-egyenlőtömeg-megoldást (Albouy, 1996) mutató metszéspontja $\beta = 33.0391$ -nél.

A $\mu = \mu_2$ eset megoldását mutatja a 8. ábra (szintén a két konkáv eset összevonásával). Az A test tömege $\beta = 0$ -nál és $\beta = 60$ -nál is nulla, a másik háromé pedig ennek megfelelően $\mu = \mu_2 = 1/3$. A közbüls $\beta \in (0, 60)$ értékekre kezdetben μ_1 monoton növekszik, a közös $\mu = \mu_2$ pedig enyhén csökken. Az első metszéspontot a szinguláris pontban ($\beta = 30$) találjuk, ahol a $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1/4$ a $\mu = \mu_2$ esetben szükségszerűen fennáll. A négy egyenlő tömeget eredményező második metszéspont $\beta = 33.0391$ -nél következik be (lásd még: 5. ábra). A két metszéspont között a piros színű $\mu = \mu_2$ görbe



8. ábra. A dimenziótlan tömegek változása β függvényében (konkáv esetek, $\mu = \mu_2$). A fekete szaggatott görbe a μ_1 maradéktömeget mutatja a három egyenlő mellett. A fekete pontok a négy egyenlő $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1/4$ tömeget jelölik $\beta = 30$ -nál és $\beta = 33.0391$ -nél. A jobb oldali ábra a bal oldali kinagyítása a feketével jelölt metszéspontok közötti tartományban. A zölddel jelölt $\mu_1 = 0.250497$ és $\mu = \mu_2 = 0.249835$ szélsőértékeket jelölnék.

globális minimumot, μ_1 pedig globális maximumot ér el, melyeket a 8. ábra jobb oldali paneljén zölddel színezett pontok jelölnek. A második metszéspont után μ_1 a végpontbeli 0-hoz, $\mu = \mu_2$ pedig $1/3$ -hoz tart.

Kitekintés

Kitekintésként érdekes volt megvizsgálni a kérdést, hogy az égitestek körében vajon találhatóak-e a fent bemutatott elméletnek megfelelő kon gurációkat mutatók. Négyes-csillag-rendszerek után kutatva a keresést két adatbázis alapján végeztem el: Tokovinin (2014) és Tokovinin (1997) publikációjához tartozó katalógusokban összesen több mint **100** négyesrendszert vizsgáltam meg. Sok olyan esetet találtam, ahol jelen volt két közel egyenlő tömeg, azonban a keringési periódusidőket megvizsgálva és azokat rendkívül különbözőnek találva, az önhasznó mozgás kizárható volt. Az ismert négyesrendszerek között tehát kis valószínűséggel lehet centrális kon gurációt mutatót találni. (Annak kérdése, vajon a két egyenlő tömegnek pontosan azonosnak kell-e lennie, vagy a közelítő egyenlőség is elegendő, stabilitási probléma, mely egyelőre nyitott kérdés.)

Zárógondolatként megjegyzem, hogy míg a csillagoknak és planetáris testeknek nem mondhatjuk meg, pontosan milyen tömeggel és milyen pozícióban helyezkedjenek el egy rendszerben, hogy a kon guráció centrális legyen, a mesterséges égitesteknél mindezt

megtehetjük. Érdemes tehát e éle alkalmazásokra is gondolni. Összességében azonban az alkalmazások behatóbb tanulmányozását mindenképpen egy kiterjedt stabilitás-vizsgálatnak kell megelőznie.

Hivatkozások

- Albouy, A.: The symmetric central configurations of four equal masses, *Commun. Contemp. Math.*, 198, 131–136 (1996)
- Albouy, A., Fu, Y., Sun, S.: Symmetry of planar four-body convex central configurations, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 464, 1355–1365 (2008)
- Albouy, A., Kaloshin, V.: Finiteness of central configurations of n bodies in the plane, *Ann. Math. (2)*, 176, 535–588 (2012)
- Alvarez-Ramírez, M., Llibre, J.: The Symmetric Central Configurations of the 4-body Problem with Masses $m_1 = m_2 \neq m_3 = m_4$, *Appl. Math. Comput.*, 219, 5996–6001 (2013)
- Bernat, J., Llibre, J., Pérez-Chavela, E.: On the planar central configurations of the 4-body problem with three equal masses, *Math. Anal.*, 16, 1–13 (2009)
- Chazy, J.: Sur certaines trajectoires du problème des n corps, *Bull. Astron.*, 35, 321–389 (1916, 1918)
- Érdi, B., Czirják, Z.: Central configurations of four bodies with an axis of symmetry, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 125, 33–70 (2016)
- Hampton, M., Moeckel, R.: Finiteness of relative equilibria of the four-body problem, *Inventiones Mathematicae*, 163, 289–312 (2005)
- Lehmann-Filhés, R.: Über zwei Fälle des Vielkörperproblems, *Astronomische Nachrichten*, 127, 137 (1891)
- Long, Y., Sun, S.: Four-Body Central Configurations with some Equal Masses, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 162, 25–44 (2002)
- MacMillan, W. D., Bartky, W.: Permanent Configurations in the Problem of Four Bodies, *Transactions of the American Mathematical Society*, 34, 838–875 (1932)

- Meyer, K. R., Schmidt, D. S.: Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 8, 215 225 (1988)
- Moulton, F. R.: The Straight Line Solutions of the Problem of N Bodies, *Annals of Mathematics*, 12, 1 17 (1910)
- Palmore, J. I.: Classifying relative equilibria. II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81, 489 491 (1975)
- Perez-Chavela, E., Santoprete, M.: Convex Four-Body Central Configurations with Some Equal Masses, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 185, 481 494 (2007)
- Pizzetti, P.: Casi particolari del problema dei tre corpi, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 13, 17 26 (1904)
- Shi, J., Xie, Z.: Classification of four-body central configurations with three equal masses, *J. Math. Anal. Appl.*, 363, 512 524 (2010)
- Simó, C.: Relative equilibrium solutions in the four body problem, *Celest. Mech.*, 18, 165 184 (1978)
- Smale, S.: Mathematical Problems for the Next Century, *The Mathematical Intelligencer*, 20, 7 15 (1998)
- Tokovinin, A. A.: MSC - a catalogue of physical multiple stars, *Astronomy and Astrophysics Supplement series*, 124, 75 84 (1997)
- Tokovinin, A. A.: From Binaries to Multiples. I. Data on F and G Dwarfs within 67 pc of the Sun, *The Astronomical Journal*, 147, 86 (2014)
- Veras, D.: Relating binary-star planetary systems to central configurations, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 462, 3368 3375 (2016)
- Wintner, A.: *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Mathematical Series, v. 5, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1941)
- Xie, Z.: Isosceles trapezoid central configurations of the Newtonian four-body problem, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 142, 665 -672 (2012)

Mellékletek

1. Összegzés

Kar: TTK

ÚNKP 2017/2018 "A" keret

Képzési szint: MSc

Név: Kovári Emese

Cím: Tengelyszimmetrikus centrális kon gurációk vizsgálata a négytest-problémában

A centrális négytest-probléma tengelyszimmetrikus esetében két test (A és B) a rendszer szimmetriatengelyén fekszik tetszőleges tömegekkel, a maradék két, egyenlő tömegű test (E és E^j) pedig arra szimmetrikusan helyezkedik el. Érdi és Cziráj (2016) munkája óta ismerjük a probléma analitikus megoldását, ismeretlennek tekintve a négy test μ_1 , μ_2 , μ , μ dimenziótlan tömegét, és ismert paraméterként kezelve a kon guráció alakját meghatározó α és β szögkoordinátákat, melyek jól meghatározott tartományokban vehetnek fel értékeket.

Az analitikus elmélet alkalmazásaképpen a speciális, három egyenlő tömeget tartalmazó rendszer esetével foglalkoztam. Léven, hogy két egyenlő tömeg eleve adott a rendszerben, három egyenlő tömeget úgy kapunk, hogy vagy az A , vagy a B test tömegét az E , E^j -ével egyenlőnek állítjuk be: $\mu = \mu_1$, vagy $\mu = \mu_2$. Ez a megközelítés két megoldáscsaládot eredményezett, mindkettőt külön-külön vizsgáltam a konvex és konkáv kon gurációkra. A teljes leíráshoz először numerikusan kiszámítottam azon α , β párokat, amelyek kielégítették a három egyenlő tömegre felírt analitikus feltételeket, majd ezek ismeretében a normált tömegeket is meghatároztam.

A konvex $\mu = \mu_2$ és konkáv $\mu = \mu_1$ esetek szögtérbeli megoldásgörbéinek egy-egy szűk intervallumának kivételével az α , β szögpár egyértelműnek adódott: az A test minden helyzetéhez egyértelműen létezik a B testnek egy olyan pozíciója, melyre vagy A , vagy B egyenlő tömegű az E , E^j testekkel.

Kitekintésként az elméletet a gyakorlati alkalmazhatóságával foglalkoztam. A négyescsillag-rendszerek világában végzett keresési eredményeim alapján elmondható, hogy az Univerzumban kis valószínűséggel fordulnak elő tengelyszimmetrikus centrális kon gurációt mutató négyescsillag-rendszerek, ez azonban nem szab gátat az űrhajózásban felmerülő és a (talán nem is olyan) távoli jövőben akár meg is valósuló ötleteknek.

Érdeemes azonban rávilágítani egy stabilitás-vizsgálat fontosságára és szükségességére, mely amellet, hogy az elmélet teljességét erősítené, mindenképpen előrelépést jelentene a gyakorlati alkalmazások terén is.

2. Konferenciaszereplések és publikációk

- ÚNKP Konferencia, 2018. máj. 24.:
előadás: Tengelyszimmetrikus centrális konfigurációk vizsgálata a négytest-problémában
- Beküldött, elbírálás alatt álló publikáció:
folyóirat: Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy
cím: The kite central configurations of four bodies with three equal masses

3. Egyéb, dologi keretben megvalósuló eredmény

- Sikeres B típusú, angol nyelvű felsőfokú nyelvvizsga